PLP - Recuperatorio del Primer Parcial - 2^{do} cuatrimestre de 2021

Este examen se aprueba obteniendo al menos dos ejercicios bien menos (`B-`) y uno regular (`R`). Las notas para cada ejercicio son: `-`, `I`, `R`, `B-`, `B`. Entregar cada ejercicio en hojas separadas. Poner nombre, apellido, número de orden y cantidad de hojas en la primera hoja, y numerar las hojas. Se puede utilizar todo lo definido en las prácticas y todo lo que se dio en clase, colocando referencias claras.
El orden de los ejercicios es arbitrario. Recomendamos leer el parcial completo antes de empezar a resolver.

Ejercicio 1 - Cálculo lambda

Se desea extender el cálculo lambda para poder modelar **Pilas**. Para eso se extienden los tipos y expresiones de la siguiente manera:

$\sigma ::= \ldots \mid \texttt{Pila}_\sigma$

$M, N ::= \ldots \mid \{\}_\sigma \mid \texttt{apilar}(\texttt{M},\texttt{N}) \mid \texttt{tope}(\texttt{M}) \mid \texttt{desapilar}(\texttt{M}) \mid \texttt{esVacia?}(\texttt{M}) \mid \texttt{esta?}(\texttt{M},\texttt{N})$

donde:

- $\texttt{Pila}_\sigma$ es el tipo de las pilas con elementos de tipo σ.
- $\{\}_\sigma$ describe a la pila vacía de elementos de tipo σ.
- $\texttt{apilar}(\texttt{M},\texttt{N})$ devuelve la pila que se obtiene al apilar el elemento M en la pila N.
- `tope(M)` devuelve el tope de la pila M.
- $\texttt{desapilar}(\texttt{M})$ devuelve la pila obtenida de remover el tope de la pila M.
- $\texttt{esVacia?}(\texttt{M})$ devuelve si la pila M es vacía.
- $\texttt{esta?}(\texttt{M},\texttt{N})$ devuelve si el elemento M está en la pila N.

Se pide:

a) Dar las reglas de tipado para soportar los nuevos términos.

b) Describir el nuevo conjunto de valores y dar las reglas de reducción en un paso para los nuevos términos, de tal forma que los elementos de la pila se reduzcan sólo al mostrar el tope y al consultar si un elemento está en la pila. No es necesario escribir las reglas de congruencia, basta con indicar cuántas son.

c) Reducir el siguiente término:

$$\texttt{esta?}(\texttt{esVacia?}(\{\}_{\texttt{Pila}_{\mathsf{Bool}}}), \texttt{apilar}(\texttt{esVacia?}(\{\}_{\mathsf{Nat}}), \texttt{desapilar}(\texttt{apilar}(\mathsf{False}, \{\}_{\mathsf{Bool}}))))$$

Ejercicio 2 - Inferencia de Tipos

Se desea diseñar un algoritmo de inferencia de tipos para el cálculo lambda extendido con fórmulas proposicionales de la siguiente manera:

$\sigma ::= \ldots \mid \texttt{Prop}$

$M ::= \ldots \mid \neg M \mid M \vee M \mid \texttt{esSatisfacible}(M)$

Las reglas de tipado son las siguientes:

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \texttt{Prop}}{\Gamma \triangleright \neg M : \texttt{Prop}}\text{T-NEG} \qquad \frac{\Gamma \triangleright M : \texttt{Prop} \quad \Gamma \triangleright \texttt{N} : \texttt{Prop}}{\Gamma \triangleright M \vee N : \texttt{Prop}}\text{T-OR}$$

$$\frac{\Gamma, x_1 : \texttt{Prop}, \ldots, \texttt{x}_\texttt{n} : \texttt{Prop} \triangleright M : \texttt{Prop} \quad \mathsf{fv}(M) = \{x_1, \ldots, x_n\}}{\Gamma \triangleright \texttt{esSatisfacible}(M) : \mathsf{Bool}}\text{T-ESSAT}$$

Tener en cuenta que $\texttt{esSatisfacible}(M)$ liga todas las variables libres de M.

a) Extender el algoritmo de inferencia para admitir las expresiones incorporadas al lenguaje, de tal manera que implemente las reglas de tipado T-NEG, T-OR y T-ESSAT.

b) Aplicar el algoritmo extendido con el método del árbol para dar el tipo de las siguientes expresiones, exhibiendo las sustituciones utilizadas. De no tipar, indicar el motivo.

I. $(\lambda x.\texttt{esSatisfacible}((\mathsf{if}\ y\ \mathsf{then}\ x\ \mathsf{else}\ z \vee \neg z) \vee z))\mathsf{True}$

II. $\lambda x.\neg(\lambda y.\neg y)(x \vee x)$

Ejercicio 3 - Subtipado

Se desea extender el cálculo lambda para modelar **Diccionarios**. Para eso se extienden los tipos y expresiones de la siguiente manera:

$\sigma ::= \cdots \mid \texttt{Dicc}(\sigma, \tau)$

$M, N, O ::= \cdots \mid \texttt{Vacio}_{\sigma,\tau} \mid M[N] \leftarrow O \mid \texttt{foldD}\ M\ \texttt{base}\ = N;\ \texttt{rec}(k, v, r) = O$

- $\texttt{Dicc}(\sigma, \tau)$ es el tipo de los diccionarios con claves de tipo σ y valores de tipo τ.
- $\texttt{Vacio}_{\sigma,\tau}$ es un diccionario vacío con claves de tipo σ y valores de tipo τ.
- $M[N] \leftarrow O$ define el valor O en el diccionario M para la clave N.
- $\texttt{foldD}\ M\ \texttt{base}\ = N;\ \texttt{rec}(k, v, r) = O$ realiza la recursión sobre el diccionario M, retornando N en el caso base y O en el caso recursivo. Las variables k, v y r aparecen libres en O y deberán ligarse con la clave, el valor definido para esta clave y el resultado recursivo, respectivamente.

Las reglas de tipado son las siguientes:

$$\frac{}{\Gamma \triangleright \texttt{Vacio}_{\sigma,\tau} : \texttt{Dicc}(\sigma, \tau)}\text{T-VAC} \qquad \frac{\Gamma \triangleright M : \texttt{Dicc}(\sigma, \tau) \quad \Gamma \triangleright N : \sigma \quad \Gamma \triangleright O : \tau}{\Gamma \triangleright M[N] \leftarrow O : \texttt{Dicc}(\sigma, \tau)}(\text{T-ADD})$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \texttt{Dicc}(\tau, \rho) \quad \Gamma \triangleright N : \sigma \quad \Gamma \cup \{k : \tau, v : \rho, r : \sigma\} \triangleright O : \sigma}{\Gamma \triangleright \texttt{foldD}\ M\ \texttt{base}\ = N;\ \texttt{rec}(k, v, r) = O : \sigma}(\text{T-FOLD})$$

Se pide:

a) Para cada una de las siguientes expresiones responder si debería tipar y por qué:

- $(\lambda x : \texttt{Dicc}(\mathsf{Int}, \mathsf{Nat}).\, x[\mathsf{True}] \leftarrow 20)\ \texttt{Vacio}_{\mathsf{Nat},\mathsf{Bool}}$
- $\texttt{foldD}\ \texttt{Vacio}_{\mathsf{Int},\mathsf{Nat}}[-5] \leftarrow \mathsf{True}\ \texttt{base}\ = \texttt{Vacio}_{\mathsf{Float},\mathsf{Int}};\ \texttt{rec}(k, v, r) = r[\sqrt{k}] \leftarrow v$

b) Dar la(s) regla(s) de subtipado y justificar en términos del principio de sustitutividad.

c) Para las expresiones que deben tipar del punto a), mostrar el juicio de tipado y derivarlo.

Puede asumirse el siguiente axioma y regla

$$\Gamma \triangleright 20 : \mathsf{Nat} \qquad \Gamma \triangleright -5 : \mathsf{Int} \qquad \frac{\Gamma \triangleright M : \mathsf{Nat}}{\Gamma \triangleright \sqrt{M} : \mathsf{Float}}\text{T-SQRT}$$